2013 年度　修士論文要旨

3 次元 Euclid 空間曲線および相似幾何における平面曲線の時間発展

関西学院大学大学院理工学研究科
数理科学専攻　黒瀬研究室　松宮　孝明

平面曲線が時間経過に伴い変化するとき, 曲線の曲率も時間変化する。さらに, 曲線が特定のルールに従って時間発展 (運動) する場合, 曲率の時間変化を表す方程式が可積分系方程式とよばれる方程式になることがある。このような時間発展のうちで, 本研究では

- 3 次元 Euclid 空間の曲線の時間発展で, 捩率が常に一定であり, 曲率の時間変化が変形 Korteweg-de Vries 方程式に従うもの
- 相似幾何における平面曲線の時間発展で, 相似曲率の時間変化が Burgers 方程式に従うもの

の二つを考察した。

1　3 次元 Euclid 空間の曲線の時間発展

時間 t に従って変化する空間曲線 $p(s,t)$ (s は弧長係数) を考え, $p(s,t)$ の時間方向の変化が, $p_t = \alpha\mathbb{T} + \beta\mathbb{N} + \gamma\mathbb{B}$ (α,β,γは (s,t) の関数) で与えられるとする。この時, 捩率が一定であり曲率の時間変化が n 次変形 Korteweg-de Vries (mKdV) 方程式 $\kappa_t = \Omega^n\kappa_s$ ($\Omega = \partial_s^2 + \kappa^2 + \kappa_s\partial_s^{-1}\cdot\kappa$) で与えられるような曲線の時間発展を見つけた。

定理 1　$\beta_k = \Omega^{k-1}\kappa_s$, $\gamma_k = \partial_s^{-1}\beta_k$, $\alpha_k = \partial_s^{-1}(\kappa\beta_k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とおき, 定数 λ と $n \in \mathbb{N}$ に対して α, β, γ をそれぞれ,

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(2k-1)\lambda^{2(k-1)}\alpha_{(n+1)-k} + (-1)^n(2n+1)\lambda^{2n}$$
$$\beta = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(2k-1)\lambda^{2(k-1)}\beta_{(n+1)-k}$$
$$\gamma = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}2k\lambda^{2k-1}\gamma_{(n+1)-k}$$

で定める。すると, 曲線の時間発展 $p(s,t)$ が, $\lambda(s,0) \equiv \lambda$, $p_t = \alpha\mathbb{T} + \beta\mathbb{N} + \gamma\mathbb{B}$ を満たすならば, この時間発展で捩率は一定であり, 曲率の時間変化は n 次 mKdV 方程式に従う。

2　相似幾何における平面曲線の時間発展

時間 t に従って変化する平面曲線 $p(\theta,t)$ (θは相似不変径数) を考え, $\mathbb{T}^{\mathrm{S}}(\theta,t) = p_\theta(\theta,t)$, $\mathbb{N}^{\mathrm{S}}(\theta,t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。また各 t に対して $p(\theta,t)$ の相似曲率を $\kappa^{\mathrm{S}}(\theta,t)$ とお

く。 $p(\theta,t)$ の時間方向の変化が、

$$p_t(\theta,t) = -\kappa^{\mathrm{S}}(\theta,t)\mathbb{T}^{\mathrm{S}}(\theta,t) - \mathbb{N}^{\mathrm{S}}(\theta,t)$$

で与えられるとき, κ^{S} は Burgers 方程式 $\kappa^{\mathrm{S}}_t = \kappa^{\mathrm{S}}_{\theta\theta} - 2\kappa^{\mathrm{S}}\kappa^{\mathrm{S}}_\theta$ をみたす。本論文ではまず Burgers 方程式の衝撃波解

$$\kappa^{\mathrm{S}}_N = -\frac{\sum_{i=1}^N \phi_i \exp(\phi_i\theta + \phi_i^2 t + \psi_i)}{1 + \sum_{i=1}^N \exp(\phi_i\theta + \phi_i^2 t + \psi_i)} \quad (\phi_1, \cdots, \phi_N, \psi_1, \cdots, \psi_N\text{は定数})$$

に対応する時間発展を与えた。

定理 2　平面曲線 $p(\theta,t)$ を

$$\begin{aligned} p(\theta,t) = &\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \int_0^\theta \{1 + \sum_{i=1}^N \exp(\phi_i\theta + \phi_i^2 t + \psi_i)\}\cos\theta d\theta \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} \int_0^\theta \{1 + \sum_{i=1}^N \exp(\phi_i\theta + \phi_i^2 t + \psi_i)\}\sin\theta d\theta \\ &+ \int_0^t \begin{pmatrix} \{\sum_{i=1}^N \phi_i \exp(\phi_i^2 t + \psi_i)\}e^t \\ -\{1 + \sum_{i=1}^N \exp(\phi_i^2 t + \psi_i)\}e^t \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

で定めると, 平面曲線 $p(\theta,t)$ の相似曲率は衝撃波解 κ^{S}_N で与えられ, $p_t = -\kappa^{\mathrm{S}}_N\mathbb{T}^{\mathrm{S}} - \mathbb{N}^{\mathrm{S}}$ をみたす。

また, 相似曲率の時間変化が n 次 Burgers 方程式 $\kappa^{\mathrm{S}}_t = (\Omega^{\mathrm{S}})^n\kappa^{\mathrm{S}}_\theta$ $(\Omega^{\mathrm{S}} = \partial_\theta - \kappa^{\mathrm{S}} - \kappa^{\mathrm{S}}_\theta \cdot \partial_\theta^{-1})$ に従って時間変化するような平面曲線の時間発展を与えた。

定理 3　$l_0 = -1$, $l_n = \partial_\theta^{-1}(\Omega^{\mathrm{S}})^{n-1}\kappa^{\mathrm{S}}_\theta$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおいて、f_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を

$$f_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^k (-1)^i l_{2(k-i)+1} & (n\text{ が奇数 }2k-1\text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^k (-1)^{i+1} l_{2(k-i)} & (n\text{ が偶数 }2k\text{ のとき}) \end{cases}$$

で定め, $g_n = -f_{n-1}$ とおく。このとき, $p_t = f_n\mathbb{T}^{\mathrm{S}} + g_n\mathbb{N}^{\mathrm{S}}$ で与えられる平面曲線の時間発展 $p(\theta,t)$ (θは相似不変径数) に対し, 相似曲率 κ^{S} の時間変化は n 次 Burgers 方程式に従う。

参考文献

[1] 井ノ口順一, 曲線とソリトン (開かれた数学 4), 朝倉書店, 2010 年 3 月.

[2] 松浦望, 曲線と曲面の差分幾何, 日本応用数理学会論文誌, **23**(2013), 55–107.

[3] 梅原雅顕, 山田光太郎, 曲線と曲面 (微分幾何的アプローチ), 裳華房, 2006 年 6 月.